

基于反向渗流与 CI 算法的城市交通网络健壮性 分析及结构提升策略研究

摘要

本文针对城市交通网络在不同干扰环境下的健壮性评估与结构优化问题，基于 8 个城市的 OSM 数据，综合运用图论、渗流理论与启发式优化算法，展开了深入的量化分析。

针对第一问，本文在构建城市交通网络无向简单图与最大连通分量（LCC）的基础上，不仅统计了聚类系数、直径等常规指标，还创新性地引入了代数连通度等谱指标，为后续的网络健壮性预判与拓扑瓶颈分析提供了有效的前置引导。在刻画度分布时，本文在 10 种候选模型中进行了广泛比较，并采用 AIC 与 BIC 双重信息准则进行模型比选，论证了拉伸指数分布能最优拟合多数城市路网的度分布规律。

针对第二问，在评估随机节点故障对网络性能的累积影响时，本文创新性地提出了退化速率与感受率双重判据，以此来标定网络健壮性发生断崖式下滑的相变临界点，且双判据在各城市测试中表现出了高度的一致性。在模拟层面，本文运用了 Newman-Ziff 反向渗流算法与并查集数据结构，将单次轨迹的算法复杂度从二次方级大幅压降至近线性级别，显著提升了大规模网络的演化计算效率。得出沈阳是随机节点故障下最健壮的城市。

针对第三问，面对蓄意攻击场景，本文采用集体影响力（CI）算法全面替代了传统的高阶度自适应（HDA）基线策略，在稀疏的城市路网中实现了对拓扑瓶颈的精准打击与破坏效率的大幅优化。进一步的对比分析表明，尽管各城市的交通网络拓扑结构并不全同，但其在蓄意攻击与随机故障下的截断健壮性比值（ R_{CI}/R_{random} ）却呈现出高度的趋同特征。得出沈阳是蓄意攻击下最健壮的城市。

针对第四问，在拓展至空间波及式的区块攻击时，本文从理论机制上排除了易落入“密度陷阱”的 Patch-center 策略，坚持采用改进后的 SP-CI（Spatial Patch-CI）算法，确保每一步攻击都能直击网络全局连通性的命脉。此外，针对城市物理绝对尺寸差异导致的绝对波及半径比较不公问题，本文引入了“相对波及半径”的概念，得出了消除空间尺度偏差的对照结论。得出沈阳是空间波及蓄意攻击下最健壮的城市。

针对第五问，为了以最小修路成本将各城市网络健壮性提升至标杆水平，本文设计了 CFB（CI-Fragmentation-Bridge）算法，通过捕捉攻击断裂的关键节点，展现出了对第三问单点蓄意攻击的极强抵抗性，并给出了“从短到长、健壮性近似单调递增”的直观加路策略解释。在此基础上，本文引入了 Spatial-CFB 的双阶段算法，同时兼顾单点蓄意攻击与空间波及攻击的双重约束，最终在 6/7 的城市上取得了出色的增边优化结果。

关键词：交通网络；复杂网络；健壮性；蓄意攻击；集体影响力（CI）；增边优化

1 第一问：城市交通网络的构建与拓扑特征分析

1.1 问题建模

题目要求基于附件中 8 个城市的 OSM 数据构建交通网络，统计聚类系数、直径、度分布等基本特征，并建立数学模型刻画度分布的规律。

原始数据为有向边列表，每条道路以 (START_NODE, END_NODE) 的形式各记录两次（正、反方向），因此将其合并为无向边。经检查数据中不存在自环；两节点间存在多条无向边的情况占比不足 1%，对此取边权（道路长度）均值进行合并以保证简单图性质。节点空间坐标取该节点首次作为起点时的 (X, Y) 坐标（UTM 投影，单位：米）。最终构建两类图：

- 无权拓扑图 $G_{\text{topo}} = (V, E)$ ，用于结构特征分析；
- 带权图 G_w （边权为道路长度），用于后续空间距离计算。

1.2 交通网络基本特征

记图 $G = (V, E)$ ， $n = |V|$ ， $m = |E|$ ， p 为连通分量数。我们选取以下核心指标并给出定义：

$$\text{最大连通分量比例 } f_{\text{LCC}} = |V_{\text{LCC}}|/n \quad (1)$$

$$\text{平均度 } \langle k \rangle = 2m/n \quad (2)$$

$$\text{平均聚类系数 } \bar{C} = \frac{1}{n} \sum_v \frac{2T_v}{k_v(k_v - 1)} \quad (3)$$

其中 T_v 为节点 v 邻居间的实际边数， k_v 为其度。此外定义：

$$\text{直径 } D = \max_{i,j \in V_{\text{LCC}}} d(i, j) \quad (4)$$

$$\text{全局效率 } E_{\text{glob}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d(i, j)} \quad (5)$$

$$\text{代数连通度 } \lambda_2 \text{ 为 Laplacian 矩阵 } L = D_{\text{deg}} - A \text{ 的第二小特征值} \quad (6)$$

$$\text{网格化指数 } \alpha = \frac{m - n + p}{2n - 5} \quad (7)$$

其中 $d(i, j)$ 为节点 i, j 间的最短路径跳数，直径在最大连通分量（LCC）上计算。 $\lambda_2 > 0$ 当且仅当图连通； λ_2 越大，网络越难被少量节点移除所切割，是刻画连通健壮性的谱指标 [1]。 α 衡量实际回路数占平面图最大回路数之比，反映路网的冗余度 [2]。 k -core 退化数 d_k 为递归剥离低度节点后保留非空核的最大 k 值 [3]，反映核心子网的紧密程度。

大规模网络的近似算法。当 LCC 节点数超过 8000 时，精确计算所有节点对的最短路径代价过高。对此采用两种近似策略：(i) 直径采用 2-sweep BFS 近似——从任意节

点出发做两轮 BFS，取最远距离作为直径的下界估计；(ii) 全局效率采用蒙特卡洛抽样，随机采样 15000 对节点并计算其最短路径，以样本均值估计 E_{glob} 。东莞（LCC= 7658）和泉州（LCC= 5164）的规模较小，其直径和效率均为精确计算。

表 1 汇总了八城市的核心拓扑指标，极值以加粗标注。

表 1 八城市交通网络核心拓扑指标（极值加粗）

城市	$ V $	$ E $	f_{LCC}	$\langle k \rangle$	$\bar{C}$	D	E_{glob}	λ_2	d_k
成都	18300	25930	0.960	2.83	0.041	133*	0.0256	1.90×10^{-4}	7
大连	13605	17897	0.909	2.63	0.046	186*	0.0213	4.52×10^{-5}	4
东莞	8315	11128	0.921	2.68	0.036	135	0.0309	1.67×10^{-4}	4
哈尔滨	10727	14711	0.945	2.74	0.040	162*	0.0273	1.06×10^{-4}	3
青岛	13894	19018	0.953	2.74	0.030	183*	0.0233	7.71×10^{-5}	5
泉州	5672	7617	0.910	2.69	0.053	125	0.0337	2.37×10^{-4}	5
沈阳	13000	19026	0.981	2.93	0.051	117*	0.0305	4.44×10^{-4}	8
郑州	9162	12865	0.981	2.81	0.031	110*	0.0311	3.62×10^{-4}	5

注：* 表示 2-sweep BFS 近似值（LCC > 8000）； E_{glob} 均为蒙特卡洛估计（15000 次采样）。

沈阳与郑州的 $f_{\text{LCC}} > 98\%$ 、 λ_2 位列前二，直径最小（ $D = 117, 110$ ），路网连通性与冗余度最强。大连因半岛地理格局致使直径最大（ $D = 186$ ）、 λ_2 仅为沈阳的约十分之一（ 4.52×10^{-5} vs 4.44×10^{-4} ），碎片化最为严重（连通分量数 390）。所有城市均呈正度同配性（ $r > 0$ ），主干道交叉口倾向互连，符合空间路网一般规律。

1.3 算法设计与度刻画

1.3.1 拟合方法与模型选择

对 10 种候选概率模型（Poisson、几何、负二项、Zipf、离散正态、幂律、对数正态、指数、拉伸指数、截断幂律；各模型的概率质量函数详见附录 A）在 $k_{\min} = 1$ 下进行全分布最大似然估计（MLE）。利用 AIC 与 BIC 信息准则进行模型比选：

$$\text{AIC} = 2k - 2 \ln \hat{L}, \quad \text{BIC} = k \ln n - 2 \ln \hat{L} \quad (8)$$

其中 $\hat{L}$ 为最大似然值， k 为参数数目， n 为样本量。为量化选择的确定性，计算 Akaike 权重 [4]：

$$w_i = \frac{\exp(-\Delta_i/2)}{\sum_{j=1}^M \exp(-\Delta_j/2)}, \quad \Delta_i = \text{AIC}_i - \text{AIC}_{\min} \quad (9)$$

w_i 可解释为“模型 i 是真实数据生成机制”的近似后验概率。

1.3.2 拟合结果

表 2 列出各城市的最优模型及参数。七个城市的 AIC 与 BIC 最优模型均为**拉伸指数分布**（Stretched Exponential），且 Akaike 权重 $w = 1.000$ （次优模型权重在 10^{-40} 量级）；唯一例外为**沈阳**，其最优模型为**离散化正态分布**，拉伸指数位列第二（ $\Delta \text{AIC} \approx 37$ ）。

表 2 八城市度分布最优拟合模型及参数

城市	最优模型	参数 ₁	参数 ₂	AIC	BIC	ΔAIC
成都	拉伸指数	$\lambda=0.317$	$\beta=3.01$	51928	51944	90
大连	拉伸指数	$\lambda=0.341$	$\beta=3.09$	38092	38107	388
东莞	拉伸指数	$\lambda=0.335$	$\beta=3.14$	23354	23368	228
哈尔滨	拉伸指数	$\lambda=0.328$	$\beta=3.32$	29805	29819	261
青岛	拉伸指数	$\lambda=0.327$	$\beta=2.98$	40763	40778	387
泉州	拉伸指数	$\lambda=0.334$	$\beta=2.94$	16372	16385	182
沈阳	离散正态	$\mu=2.93$	$\sigma=0.94$	36557	36572	37
郑州	拉伸指数	$\lambda=0.321$	$\beta=3.51$	24984	24998	225

注：ΔAIC 为最优模型与次优模型的 AIC 差值。所有城市最优模型的 Akaike 权重 $w = 1.000$ 。

两类最优模型的概率质量函数分别为：

$$P_{SE}(K=k) \propto \exp(-\lambda k^\beta) \quad (10)$$

$$P_N(K=k) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) \quad (11)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

物理含义。拉伸指数中 $\beta > 1$ （七城市 $\beta \in [2.94, 3.51]$ ）使得高度节点的概率衰减比普通指数分布更快：交叉口的道路数受限二维平面几何容量（通常不超过 6–8 条），空间约束压制了超级枢纽的形成，使城市路网本质上不具有无标度特性。沈阳的度序列高度集中于 $k = 3$ 附近（方差均值比 VMR = 0.301，八城最低），呈现近乎正态的对称分布。

图 1 给出了八城市度分布的经验概率质量函数（PMF）及 AIC 准则下的最优模型拟合曲线，可与表 2 对照阅读。

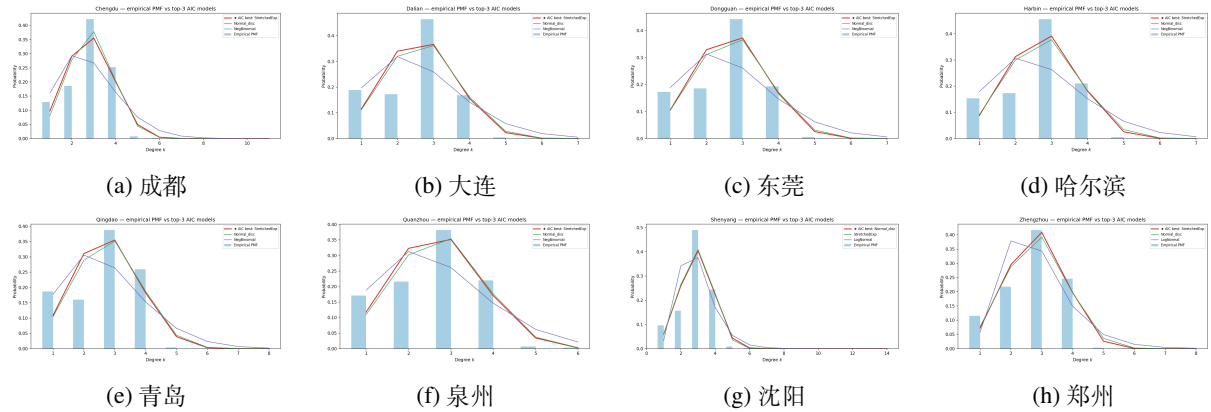


图 1 八城市度分布经验 PMF 与 AIC 最优模型拟合

1.4 数据分析与结论

1.4.1 城市分类

综合表 1 中的效率指标 (E_{glob}) 与结构冗余指标 (λ_2 、退化数 d 、 α)，将八城市归为三类：

1. **高效稳健型** (沈阳、郑州)： $f_{\text{LCC}} > 98\%$ ， λ_2 与 α 均居前列，退化数 $d \geq 5$ 。路网兼具短路径可达性与高冗余度，结构韧性最强。
2. **高效脆弱型** (成都、青岛)： 连边密度高 ($\langle k \rangle \geq 2.74$)，效率尚可，但 λ_2 偏低 (不到沈阳的一半)，存在关键瓶颈节点，一旦被移除将迅速退化。
3. **低效脆弱型** (大连)： $E_{\text{glob}} = 0.0213$ (最低)， $D = 186$ (最大)， $\lambda_2 = 4.52 \times 10^{-5}$ (最低)，半岛狭长拓扑导致路径长、效率低且缺乏旁路冗余。

东莞、哈尔滨、泉州居于中间层级。

1.4.2 对后续问题的预判

λ_2 直接控制随机游走的混合速率与 Cheeger 常数的下界—— λ_2 越小，网络越容易被少量节点移除切割为不连通碎片。沈阳的正态度分布意味着所有节点“重要性”大致相当，移除任一节点对全局连通性影响有限；而大连的低 λ_2 则意味着即使随机故障也可能击中关键桥接点。据此预判：

- 在随机故障 (Q2) 与蓄意攻击 (Q3–Q4) 下，**沈阳** 的健壮性最强 (λ_2 最大、退化数最高、度分布最均匀)；
- **大连** 的健壮性最弱 (λ_2 最低、碎片化最严重)。

此预判将在后续问题中通过渐进节点移除的性能曲线给出定量验证。

2 第二问：随机节点故障下的网络健壮性分析

2.1 问题建模

第二问考虑进行**随机节点故障**，考虑到八个交通网络的最大连通分量比例均超过 0.9，故近似考虑在最大连通分量 (LCC) 诱导子图上进行**随机节点故障**：给定无向简单图 $G = (V, E)$ ，记 $N = |V|$ 。独立重复进行蒙特卡罗 (MC) 试验；每次试验在节点集合上均匀随机抽取一个排列 π ，按该顺序逐个移除节点。记已移除节点数与 N 之比为

$$q \in [0, 1], \quad (12)$$

即以**瘫痪节点占总节点的比例**作为自变量，便于在不同规模城市之间比较。当移除比例为 q 时，残图中最大连通分量所含节点数占原始 N 的比例记为 $P(q)$ ，显然 $P(0) = 1$ 。对多次 MC 轨迹在相同的离散网格 $\{q_i\}_{i=0}^M$ 上取算术平均，得到 $\bar{P}(q_i)$ ，作为性能曲线的估计。将 q 归一化后， $P(q)$ 随 q 单调不增，可直接在统一横轴上观察各城市网络随机损伤的退化过程。

理论上用性能曲线下的面积度量整体健壮性：

$$R = \int_0^1 P(q) dq. \quad (13)$$

实际计算中， $\bar{P}$ 仅在离散点 $\{q_i\}$ 上已知，采用**梯形公式**近似式 (13)：

$$R \approx \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\bar{P}(q_i) + \bar{P}(q_{i+1})}{2} (q_{i+1} - q_i). \quad (14)$$

该做法实现简单，且对光滑单调曲线具有稳定的数值精度。

仅用一个标量 R 难以回答“在哪个故障强度附近，网络性能出现最剧烈的下滑”。为此引入**退化速率**与**感受率**双重判据，共同刻画健壮性的**显著变化**位置。将 $\bar{P}(q)$ 视作 q 的函数，定义

$$\text{退化速率: } D(q) = -\frac{d\bar{P}}{dq}. \quad (15)$$

$D(q)$ 越大，表示单位故障比例下巨分量相对规模下降越快，即网络在该 q 附近发生**断崖式失稳**。令

$$q_c^{(P)} = \arg \max_{q \in (0,1)} D(q) \quad (16)$$

为退化速率峰值点（等价于 $\bar{P}'(q)$ 取最小值的位置），用于从**序参量陡降**角度标定临界点。

另一方面，借鉴渗流理论中描述涨落强弱的**感受率**，在每一步残图上将除最大连通分量外的各连通块记为 $\{s_i\}$ ，定义

$$\chi(q) = \frac{\sum_{i \neq \text{LCC}} s_i^2}{\sum_{i \neq \text{LCC}} s_i}, \quad (17)$$

其中 s_i 为第 i 个非巨分量的节点数。有限规模系统中 $\chi(q)$ 通常在相变窗口附近出现**峰值**，对应小扰动即可引发连通结构剧烈重组的敏感区 [5]。取

$$q_c^{(\chi)} = \arg \max_{q \in (0,1)} \chi(q). \quad (18)$$

最后，将两个独立判据做**算术平均**作为报告用的共识阈值：

$$q_c = \frac{1}{2} (q_c^{(P)} + q_c^{(\chi)}). \quad (19)$$

2.2 算法设计

若采用“每删一个节点就用 BFS/DFS 重算最大连通分量”的朴素正向模拟，单条 MC 轨迹的复杂度约为 $\mathcal{O}(N(N + E))$ ，在 $N \sim 10^4$ 、数百次重复试验下代价过高。

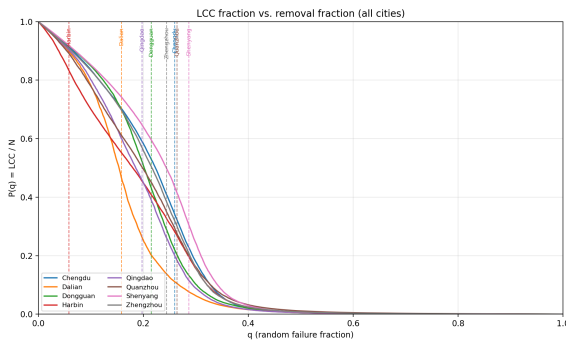
本文采用 Newman–Ziff **反向渗流**（从空图按逆序加点）框架 [6]：删点排列 π 的逆序即为加点顺序。维护连通性使用**并查集**（路径压缩与按秩合并），每加入一个节点仅合并其与已激活邻居，单次操作均摊 $\mathcal{O}(\alpha(N))$ （ α 为反 Ackermann 函数，实际可视为常数），故单条轨迹总复杂度为 $\mathcal{O}(N + E)$ 。在稀疏路网 $E = \mathcal{O}(N)$ 时近似**线性时间**，相对逐步 BFS 重算为本质改进。并查集上可 $\mathcal{O}(1)$ 增量维护最大分量规模及式 (17) 所需的分量尺寸统计，从而同步得到 $\bar{P}(q)$ 与 $\chi(q)$ 。实现中八城各 500 次 MC、随机种子固定，以保证可复现性（实现细节与参数见附录 B）。

2.3 数据分析与结论

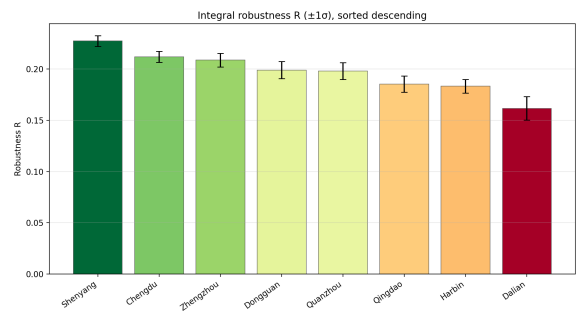
在 LCC 上完成模拟后，将各城性能曲线与指标汇总于表 3（按 R 降序排列）。图 2 给出八城 $\bar{P}(q)$ 曲线及式 (19) 对应的共识 q_c 竖线，以及 R 的柱状对比（误差棒为 MC 标准差 σ_R ）。图 3 给出感受率 $\chi(q)$ 与退化速率 $D(q) = -\bar{P}'(q)$ 的曲线，并分别标注 $q_c^{(\chi)}$ 、 $q_c^{(P)}$ 。

表 3 八城随机故障渗流指标汇总（按 R 降序排列； $q_c^{(P)}$ 、 $q_c^{(\chi)}$ 与共识 q_c 由式 (16)–(19) 得到）

排名	城市	LCC 节点数 N	R	σ_R	$q_c^{(\chi)}$	$q_c^{(P)}$	q_c
1	沈阳	12751	0.227	0.005	0.296	0.277	0.287
2	成都	17567	0.212	0.005	0.261	0.259	0.260
3	郑州	8986	0.209	0.007	0.253	0.236	0.244
4	东莞	7658	0.199	0.008	0.202	0.228	0.215
5	泉州	5164	0.198	0.008	0.266	0.262	0.264
6	青岛	13235	0.185	0.008	0.172	0.223	0.197
7	哈尔滨	10132	0.183	0.007	0.060	0.056	0.058
8	大连	12370	0.162	0.011	0.159	0.157	0.158



(a) 八城 $\bar{P}(q)$ 渗流性能曲线及共识 q_c （竖线）



(b) 八城整体健壮性 R 柱状图（ $\pm 1\sigma_R$ 误差棒）

图 2 随机节点故障下八城性能曲线与整体健壮性对比

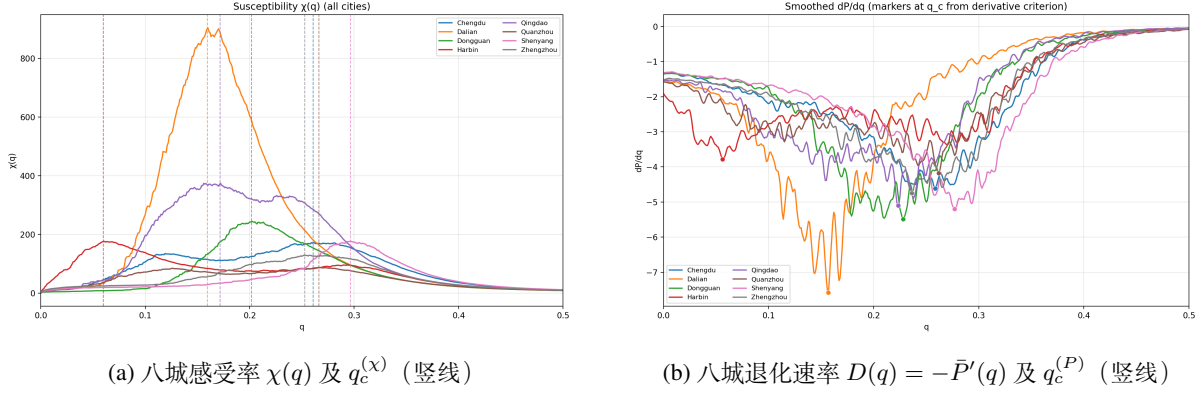


图3 双重判据曲线：感受率峰值与退化速率峰值用于标定 $q_c^{(\chi)}$ 、 $q_c^{(P)}$

健壮性排名。由表3与图2(b)，八城 R 由高到低为：沈阳 > 成都 > 郑州 > 东莞 ≈ 泉州 > 青岛 ≈ 哈尔滨 > 大连。沈阳 $R = 0.227$ 居首，大连 $R = 0.162$ 最低，二者相对差距约 40%。因此，在本文的随机故障设定与指标定义下，**沈阳的整体健壮性最强**。

双判据一致性。多数城市中 $q_c^{(\chi)}$ 与 $q_c^{(P)}$ 相对偏差在约 7% 以内（如沈阳 6.6%、成都 0.8%、郑州 6.9%、泉州 1.5%、大连 1.3%），说明微分判据与涨落判据高度自洽。青岛两判据相对偏差约 26%（ $q_c^{(\chi)} = 0.172$ 对 $q_c^{(P)} = 0.223$ ），与 $\chi(q)$ 呈宽峰、峰值对平滑参数较敏感有关，属于 $N \sim 10^4$ 有限尺寸效应的常见现象；共识 q_c 仍取式 (19) 的折中值。

相变阈值的城市差异。除哈尔滨外，其余七城的 q_c 落在 $[0.158, 0.287]$ ，即随机节点失效比例约 16%–29% 时， $\bar{P}(q)$ 通常已进入最陡下降段附近，健壮性发生显著变化；哈尔滨的共识阈值 $q_c \approx 0.058$ 远低于该区间，属于**异常提前失稳**（见图 2(a)）： $\bar{P}(q)$ 在很小 q 处即出现一次急剧下挫，之后进入相对平缓的长尾，因而 q_c 很小，但全程积分得到的 R 未必最低。结合第一问拓扑指标，哈尔滨的 k -core 退化数 $d_k = 3$ 为八城最低，表明核心子结构较薄，随机移除少量关键桥接节点即可触发早期碎裂，与渗流曲线形态一致。

与第一问谱指标的对照。第一问中代数连通度 λ_2 与 d_k 显示沈阳最强、大连最弱；本问 R 排序中沈阳、大连仍分列第 1、第 8 位，极值完全吻合。八城 λ_2 排名与 R 排名的 Spearman 秩相关系数约为 $\rho_s = 0.857$ ，说明静态谱指标对随机故障下的动态健壮性具有较强的预测力。中间位次（如成都、泉州）存在偏移，原因在于 λ_2 刻画全图连通性的代数间隙，而 R 度量随机删点轨迹上的平均巨分量比例，二者相关但不必逐城一致。

综上，在随机节点故障模型与本文指标下，**沈阳的整体健壮性位列八城之首**；大连 R 最小；多数城市的显著失稳窗口集中在 $q_c \approx 0.16$ – 0.29 ，哈尔滨则表现为极早的断崖式下滑与较低的核心厚度指标相一致。

3 第三问：蓄意攻击下的网络健壮性分析

3.1 问题建模

第二问讨论的是节点**随机**失效时的退化过程。本问考虑更具针对性的**蓄意攻击**：攻击方掌握完整拓扑信息，按既定顺序逐个移除节点，目标是用尽可能小的删除代价使网络失去大规模连通能力。设最大连通分量（LCC）诱导子图为 $G = (V, E)$ ，记 $N = |V|$ 。与第二问一致，用**瘫痪节点占总节点的比例**

$$q \in [0, 1] \quad (20)$$

作为横轴自变量，便于在不同规模城市之间比较。给定攻击序列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ （按删除先后排列），定义性能函数

$$P_\sigma(q) = \frac{|C_{\max}(G \setminus \{\sigma_1, \dots, \sigma_{\lfloor qN \rfloor}\})|}{N}, \quad (21)$$

其中 $C_{\max}(\cdot)$ 表示残图的最大连通分量规模（节点数）， $\lfloor qN \rfloor$ 为已删除节点数。取瓦解阈值为 LCC 规模不超过原始的 1%，定义**临界删除比例**

$$q^*(\sigma) = \min \left\{ \frac{k}{N} : P_\sigma\left(\frac{k}{N}\right) \leq 0.01 \right\}. \quad (22)$$

在此基础上定义**截断健壮性**

$$R_{0.01}(\sigma) = \int_0^{q^*(\sigma)} P_\sigma(q) dq. \quad (23)$$

实际计算中， P_σ 仅在离散删除步上已知，采用与第二问相同的**梯形公式**近似式 (23)：

$$R_{0.01}(\sigma) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k^*-1} \frac{P_\sigma(k/N) + P_\sigma((k+1)/N)}{2}, \quad (24)$$

其中 $k^* = \lfloor Nq^*(\sigma) \rfloor$ 。第二问的随机故障情形可视为 σ 为均匀随机排列且积分区间取 $[0, 1]$ （不截断）的特例；

从优化角度看，理想的攻击序列应使截断健壮性尽可能小：

$$\sigma^* = \arg \min_{\sigma} R_{0.01}(\sigma). \quad (25)$$

3.2 算法设计

3.2.1 NP-hard 性与启发式必要性

上述决策形式可表述为**最优渗流**（optimal percolation）类问题：给定阈值 p_c ，寻找规模最小的节点集合 $S \subseteq V$ ，使得 $G \setminus S$ 的最大连通分量不超过 $p_c N$ 。Braunstein 等将其

与最小顶点分离器问题联系起来，并证明该类网络瓦解问题在计算上是 NP-hard 的 [7]。因此，一般图上的精确全局最优 σ^* 难以在多项式时间内求得，实践中采用启发式策略。

3.2.2 HDA 基线及其局限

高阶度自适应攻击 (High-Degree Adaptive, HDA) 是最直接的贪心基线：每一步删除当前残图中度最大的节点，可用最大堆在 $O(\log N)$ 时间内维护。该策略在度分布高度异质的网络中往往有效，但城市路网的 LCC 通常稀疏且度数变化范围有限（八城平均度约为 2.7，最大度通常不大）。在“度差不明显”的条件下，HDA 对节点结构重要性的区分力变弱，删除顺序退化为随机节点故障，从而削弱蓄意攻击的优势。

3.2.3 集体影响力 (CI) 攻击序列

为在稀疏、准平面的路网结构中寻找更具破坏力的删除顺序，本文采用 Morone 与 Makse 提出的**集体影响力** (Collective Influence, CI) 贪心算法 [8]。其思想来自统计物理中的**腔方法** (cavity method)：在树近似 (Bethe 格) 下，节点对巨分量渗流的贡献不仅与自身度数有关，还与其外圈邻域上的冗余连接有关。对整数 $\ell \geq 1$ ，定义

$$\text{CI}_\ell(i) = (k_i - 1) \sum_{j \in \partial \text{Ball}(i, \ell)} (k_j - 1), \quad (26)$$

其中 k_i 为节点 i 在**当前残图**中的度， $\partial \text{Ball}(i, \ell)$ 为与 i 的最短路径长度恰好等于 ℓ 的节点集合（半径 ℓ 的“球壳”）。直观上， $(k_i - 1)$ 刻画移除 i 时直接断开的“额外”邻接边数量；球壳上的求和则把这些局部断裂在中观尺度上进一步放大为对连通性的集体影响。本文取 $\ell = 2$ ，使评分能利用二阶邻域信息，更利于识别“看似度数不高、但处于低冗余通道附近”的节点。

实现上采用**自适应贪心**：用最大堆维护 CI_2 分数；每步弹出当前最高分节点，若分数因前序删除而过期则惰性重算；删除节点后，对其二阶邻域内受影响节点做局部更新。若所有存活节点的 CI 值降为 0（残图接近树或退化结构），则自动切换为 HDA 完成后缀删除，保证过程可继续直至满足阈值条件。

3.2.4 反向建图与并查集恢复 $P_\sigma(q)$

若直接在贪心删除的每一步用 BFS/DFS 重算 LCC，则单次更新约为 $O(N + E)$ ，总体代价过高。本文将“求删除顺序”和“求性能曲线”解耦：先用 CI 生成完整删除序列；再将该序列反转，从“最后被删除时的残图状态”出发，按逆序把节点逐个加回，并用**并查集**维护连通分量与最大分量规模。该框架与第二问的 Newman-Ziff 反向渗流思想一致，只是把随机加点顺序替换为蓄意攻击确定的逆序。单次加点的均摊代价为 $O(\alpha(N))$ （ α 为反 Ackermann 函数，可近似视为常数），因此整条 $P_\sigma(q)$ 曲线可在近似 $O(N\alpha(N))$

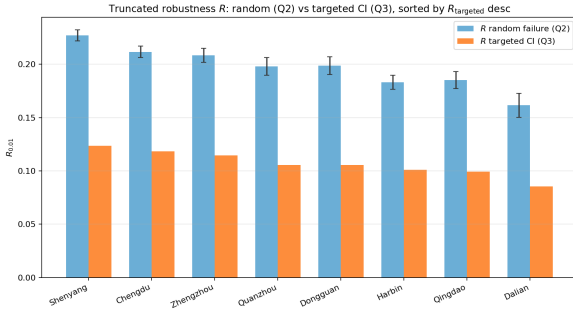
时间内恢复，从而支撑对八座城市的大规模重复实验。

3.3 数据分析与结论

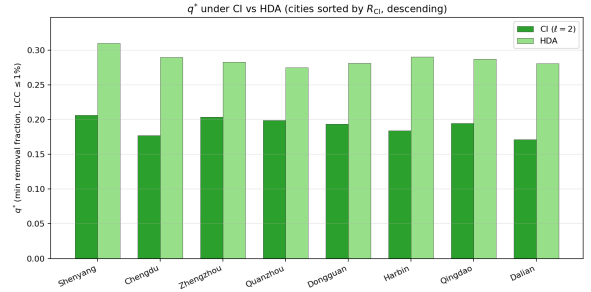
在八座城市的 LCC 上，分别运行 CI ($\ell = 2$) 与 HDA 蓄意攻击，瓦解阈值取 $P_\sigma(q) \leq 0.01$ ；同时从第二问结果中读取随机故障下的 R_{random} 用于对照。表 4 汇总主要指标，并按 R_{CI} 降序给出排名。图 4a 给出 $R_{0.01}$ 的柱状对比：在相同阈值定义下，蓄意攻击 (CI) 对应的性能曲线下方面积显著低于随机故障，体现“蓄意攻击”相对“均匀随机故障”的额外破坏效应。

表 4 八城蓄意攻击指标汇总（按 R_{CI} 降序排列； R_{CI} 、 R_{HDA} 为截断健壮性， q^* 为达到 $\text{LCC} \leq 1\%$ 的最小删除比例； R_{random} 来自第二问随机故障）

排名	城市	N	R_{CI}	R_{HDA}	R_{random}	q_{CI}^*	q_{HDA}^*
1	沈阳	12751	0.124	0.132	0.227	0.206	0.310
2	成都	17567	0.119	0.118	0.212	0.177	0.290
3	郑州	8986	0.115	0.125	0.209	0.204	0.283
4	泉州	5164	0.106	0.121	0.198	0.199	0.275
5	东莞	7658	0.105	0.119	0.199	0.193	0.281
6	哈尔滨	10132	0.101	0.130	0.183	0.184	0.290
7	青岛	13235	0.099	0.116	0.185	0.195	0.287
8	大连	12370	0.085	0.104	0.162	0.171	0.281



(a) 截断健壮性 $R_{0.01}$ 对比



(b) 瓦解阈值 q^* 对比

图 4 八城市蓄意攻击关键指标并排对比：左图为截断健壮性 $R_{0.01}$ ，右图为达到 $\text{LCC} \leq 1\%$ 的最小删除比例 q^* 。

从表 4 与图 4a 可见，在截断健壮性这一判据上，CI 在 8 城中的 7 城优于 HDA ($R_{\text{CI}} < R_{\text{HDA}}$)，仅在成都出现微小幅度的反转（约 0.8%）。另一方面，图 4b 显示在**临界删除比例** q^* 上，CI 在全部 8 城都低于 HDA：达到同一瓦解阈值所需删除比例更小。综合“面积型指标 R ”和“阈值型指标 q^* ”两条线索，两者共同表面：CI 相对 HDA 更能刻画路网中的结构薄弱环节。

进一步将 CI 的截断健壮性与随机故障对照，八城中 $(R_{\text{random}} - R_{\text{CI}})/R_{\text{random}}$ 约在 44.0%–47.1% 之间，平均值约 45.8%，标准差约 1.1 个百分点，说明在本文阈值设定下，“随机故障—蓄意攻击”造成的指标差距在八城间较为稳。图 5 给出八城 $P(q)$ 曲线：

随机故障曲线（虚线）下降相对平缓，而 CI 攻击（实线）往往在更小的 q 区间出现快速断崖，直观呈现第三问相对第二问的显著脆弱性差异。

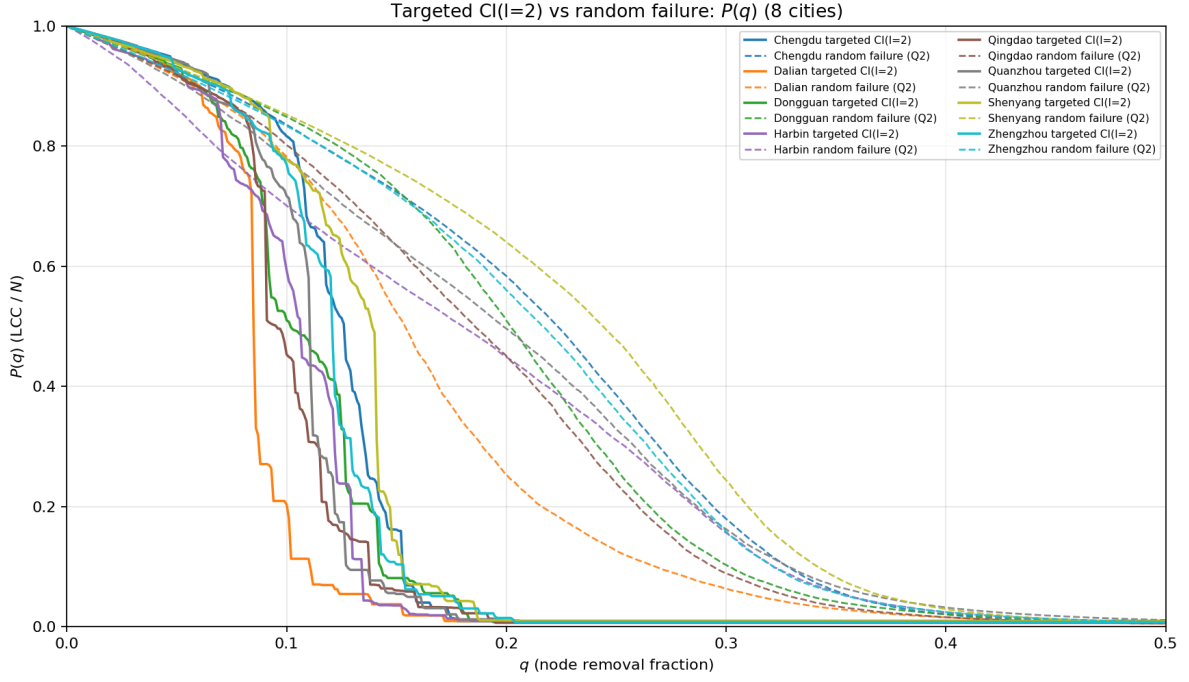


图 5 八城市 CI 蓄意攻击与随机节点故障的性能曲线对比：实线为第三问 CI ($\ell = 2$) 的 $P_\sigma(q)$ ，虚线为第二问蒙特卡罗平均 $\bar{P}(q)$ ；横轴为节点删除比例 q ，纵轴为最大连通分量相对规模。

在本文模型与算法设定下，**沈阳**的 R_{CI} 最高、 q_{CI}^* 亦居八城之首，表明在蓄意攻击场景中其 LCC 更难被“快速打碎”，需要更高的删除比例才能触及同一瓦解阈值，因此可判定为八城中**健壮性最强**的城市；大连的 R_{CI} 最低、 q_{CI}^* 也最低，相对最为脆弱。结合第一问对拓扑冗余与结构瓶颈的静态刻画，可以理解为：环路更丰富、整体更均匀的网络更难被小集合节点“撬动”全局连通性；而存在明显狭窄通道、桥接依赖更强的网络则更利于 CI 找到高杠杆删除点。上述结论与第二问随机故障下的相对排序相一致，形成从随机故障到蓄意攻击的相互印证。

4 第四问：空间波及式蓄意攻击下的健壮性分析

4.1 问题建模

第四问将第三问的逐点蓄意攻击推广到**空间范围故障**：每步选取中心节点 c_t 后，同时瘫痪其物理距离 r 以内的全部存活节点。沿用前问符号，设 LCC 子图 $G = (V, E)$ ， $N = |V|$ ，各节点具有 UTM 平面坐标 $\text{pos}(v) \in \mathbb{R}^2$ （单位：米）。定义第 t 步的**波及区域** (Patch)：

$$S_t(r) = \{v \in V_{\text{alive}} : \|\text{pos}(v) - \text{pos}(c_t)\|_2 \leq r\}. \quad (27)$$

累计删除比例 $q_t = |\bigcup_{\tau=1}^t S_\tau|/N$ 。与第三问不同的是，每步攻击使 q 跳跃 $|S_t|/N$ （而非固定的 $1/N$ ），但 Patch 内部的逐节点移除顺序仍影响 $P(q)$ 曲线形状。截断健壮性定义同前：

$$q^* = \min\{q : P(q) \leq 0.01\}, \quad R_{0.01}(\sigma, r) = \int_0^{q^*} P_\sigma(q) dq, \quad (28)$$

注意 $R_{0.01}$ 现为攻击序列 σ 与波及半径 r 的二元函数。当 $r \rightarrow 0$ 时退化为第三问逐点攻击。最优空间攻击问题写作 $\sigma^* = \arg \min_\sigma R_{0.01}(\sigma, r)$ 。

4.2 算法设计

4.2.1 NP-hard 性与中心选择策略

当 $r \rightarrow 0$ 时本问退化为第三问，而第三问已为 NP-hard 问题 [7]。 $r > 0$ 引入额外空间耦合约束但不缩减搜索空间，故空间区块攻击问题至少与逐点攻击同等困难，仍需启发式算法。

在确定攻击中心时，一个自然想法是最大化每步 Patch 内的 CI 总分 $\sum_{j \in S} \text{CI}(j)$ ，但这一策略存在**密度陷阱**：高密度区域（如市中心）CI 总和大，但空间冗余路径同样丰富，局部完全毁灭并不能有效切断全局连通性。表 5 对比了三种候选策略。

表 5 空间攻击中心选择策略对比

策略	评分函数	评价
Patch-CI Sum	$\sum_{j \in S} \text{CI}(j)$	偏好高密度区，落入密度陷阱
Patch-CI Density	$\frac{\sum_{j \in S} \text{CI}(j)}{ S }$	退化为单节点攻击 ($ S =1$)
CI-Center (本文)	$\text{CI}_\ell(c)$	直接定位拓扑瓶颈，理论有保证

本文采用 **CI-Center** 策略（记为 SP-CI, Spatial Patch-CI）：每步选取存活节点中第三问定义的 CI_ℓ ($\ell = 2$) 最大者作为攻击中心，Patch 内的附带节点移除是波及半径 r 的物理后果而非优化对象。其依据在于 CI_ℓ 是 Bethe 格上最优渗流问题的一阶近似解 [8]：CI 最高的节点是拓扑意义上的连通性瓶颈——移除它对巨分量的损伤最大。CI-Center 绕过密度假象，直接定位连接不可替代性最高的节点，即使其空间邻域稀疏、Patch 规模较小，仍能最大化全局连通性损失。

4.2.2 Patch 内排序与计算加速

微观排序。确定攻击中心 c_t 后，Patch S_t 内的全部存活节点按各自 CI 值从大到小排入全局删除序列，确保 $P(q)$ 在每个 Patch 对应的 q 区间内实现最陡下降——最关键节点先被移除，造成 LCC 的最大边际损失。当所有存活节点的 CI 均降为零时，算法自动切换为按最大度贪心（HDA）完成剩余删除。

空间检索。对全部 N 个节点的二维坐标构建 k -d 树空间索引 [9], 为给定波及半径 r 一次性预计算各节点的空间邻域集合

$$\text{SpatialNbrs}(v, r) = \{u \in V : \|\text{pos}(u) - \text{pos}(v)\|_2 \leq r\}, \quad (29)$$

将逐步空间查询的均摊复杂度从 $O(N)$ 降至 $O(\log N)$ 。

性能曲线反向建图。与第三问一致, 全流程解耦为两个独立阶段: Phase A 以 CI-Center 贪心堆 (惰性求值) 生成完整攻击序列; Phase B 将该序列时间反转, 从残图出发逐节点加回, 用按秩合并与路径压缩的并查集以 $O(\alpha(N))$ 均摊代价维护 LCC, 从而在近线性时间内恢复完整 $P(q)$ 曲线。由于空间攻击的 Patch 较大, Phase A 的迭代步数远少于第三问 (例如大连在 $r = 1000$ m 下仅需 401 步 vs 第三问的 2119 步)。

4.3 数据分析与结论

4.3.1 健壮性随绝对波及半径的变化

对 8 座城市分别在 $r \in \{0, 50, 200, 300, 500, 1000, 2000, 3000, 5000\}$ (米) 下执行 SP-CI 攻击, $r = 0$ 即第三问精准 CI 攻击。表 6 汇总截断健壮性 $R_{0.01}$ 。

表 6 八城空间攻击截断健壮性 $R_{0.01}$ 汇总 (以绝对波及半径 r 为变量; 各列最大值加粗)

城市	N	$R(0)$	$R(50)$	$R(200)$	$R(300)$	$R(500)$	$R(1000)$	$R(2000)$	$R(3000)$
沈阳	12751	0.124	0.183	0.268	0.323	0.371	0.413	0.454	0.455
郑州	8986	0.115	0.154	0.226	0.262	0.334	0.397	0.426	0.456
成都	17567	0.119	0.159	0.236	0.277	0.328	0.385	0.423	0.433
哈尔滨	10132	0.101	0.139	0.234	0.280	0.329	0.392	0.416	0.420
青岛	13235	0.099	0.115	0.209	0.255	0.317	0.361	0.400	0.423
大连	12370	0.085	0.106	0.203	0.250	0.280	0.354	0.373	0.418
东莞	7658	0.105	0.121	0.176	0.210	0.273	0.312	0.337	0.388
泉州	5164	0.106	0.129	0.172	0.195	0.238	0.275	0.288	0.345

续: $R(5000)$ 依次为 0.459 (沈), 0.450, 0.431, 0.395, 0.421, 0.411, 0.420, 0.353

由表 6 与图 6 可得如下发现:

(1) 预算稀释效应。从 $r = 0$ 到 $r = 5000$ m, 所有城市 $R_{0.01}$ 经历约 3–4 倍上升。以沈阳为例, R 从精准攻击下的 0.124 升至 $r = 1000$ m 的 0.413 (增 233%)。每步 Patch 中仅中心节点是经 CI 选定的拓扑瓶颈, 其余 $|S_t| - 1$ 个附带节点为空间约束强制移除的副产物, 消耗了有限的攻击预算而未精准打击连通性。

(2) 两段式变化率。 $r \lesssim 1000$ m 时 R 急剧上升 (八城从 $r = 0$ 到 $r = 500$ m 平均增幅约 190%); $r \gtrsim 2000$ m 后 R 趋于饱和, 增幅收窄至个位百分比。小半径阶段 Patch 扩大主要增加非关键的空间邻居, 攻击效率被迅速稀释; 当 r 足够大时, Patch 已覆盖大部分城市区域, 稀释效应触及天花板。

(3) 大半径下的非单调回落。 $r = 5000$ m 处, 哈尔滨 (0.395 vs $r=3000$ 的 0.420) 和郑州 (0.450 vs 0.456) 出现微弱的 R 回落。这是因为超大 Patch 可能横跨原本拓扑分离

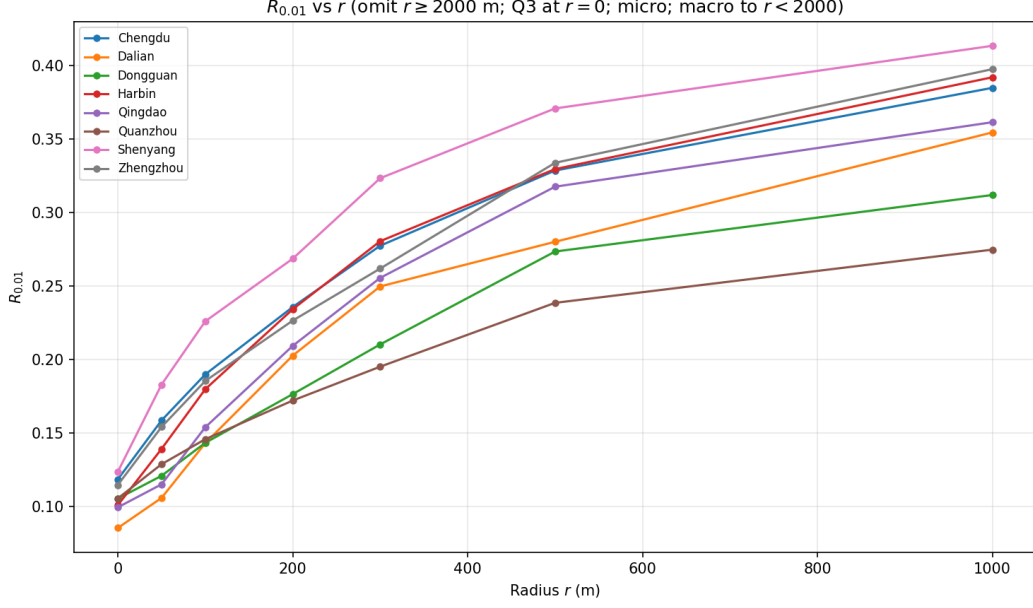


图 6 八城市 $R_{0.01}$ 随波及半径 r 的变化 ($r \leq 1000$ m 区间; 含 $r = 0$ 的第三问 CI 攻击基线)

的区域 (如河流两岸), 使 Patch 演变为跨区域拓扑切割, 部分抵消预算稀释效应。

4.3.2 相对波及半径下的健壮性对标

上述分析采用统一的绝对波及半径 r 。然而不同城市空间尺度差异显著 (详见附录四): $r = 1000$ m 对沈阳只是局部故障, 对空间紧凑的泉州则覆盖核心路网的较大比例。每次空间攻击摧毁的城市面积比例 $\eta = \pi r^2 / (c \cdot D^2)$ (D 为城市特征空间尺度, c 为形状因子), 在固定 r 下 $\eta \propto 1/D^2$, 物理尺度小的城市被删除了更大比例的非关键节点, 导致了偏高的健壮性。

为消除这一偏差, 定义城市 i 的**特征空间尺度**为

$$D_i = \sqrt{N_i / \rho_i}, \quad (30)$$

其中 ρ_i 为 LCC 节点的空间密度 (由 $r = 500$ m 下平均 Patch 规模估计), 并定义**相对波及半径** $r_{\text{rel}} = r/D$ 。以沈阳为基准, 各城市的**公平检验半径**

$$r_{\text{fair}}^{(i)} = 1000 \times \frac{D_i}{D_{\text{Shenyang}}} \quad (31)$$

保证所有城市面对等比例面积的空间攻击。在固定 r_{rel} 下 $\eta = \pi r_{\text{rel}}^2 / c$ 与 D 无关, 实现物理公平。表 7 列出各城市的 D 、相对指标及公平半径下的插值健壮性。

对比两组排名可见: 空间尺度较大的城市 (成都 $D=30.9$ km、大连 $D=28.8$ km) 在相对标准下检验放宽 ($r_{\text{fair}} > 1000$), 健壮性略有提升; 空间尺度较小的城市 (郑州、哈尔滨、东莞、泉州) 检验收紧 ($r_{\text{fair}} < 1000$), 健壮性下降。以泉州为例, R 从绝对半径下的 0.275 降至公平半径下的 0.260, 说明绝对半径比较实际上**高估**了紧凑型城市的空

表 7 相对波及半径对标下的八城空间健壮性（按 $R(r_{\text{fair}})$ 降序；最大值加粗）

排名	城市	D (km)	$r_{\text{rel}}^{r=1000}$ (%)	$R(1000)$	r_{fair} (m)	$R(r_{\text{fair}})$
1	沈阳	27.4	3.65	0.413	1000	0.413
2	成都	30.9	3.24	0.385	1127	0.390
3	郑州	24.7	4.05	0.397	901	0.385
4	哈尔滨	22.7	4.41	0.392	828	0.370
5	青岛	29.1	3.44	0.361	1062	0.363
6	大连	28.8	3.47	0.354	1051	0.355
7	东莞	22.5	4.44	0.312	821	0.298
8	泉州	21.9	4.57	0.275	799	0.260

注： $r_{\text{rel}}^{r=1000}$ 为绝对 $r = 1000$ m 时各城市的相对波及半径。 $R(r_{\text{fair}})$ 由相邻实测点线性插值。

间健壮性。但核心结论不变：**沈阳始终位列第一**，泉州始终垫底。

4.3.3 最健壮城市

无论以绝对波及半径还是相对波及半径为标准，**沈阳**的截断健壮性均为八城之首。在 $r = 1000$ m 下 $R_{0.01} = 0.413$ ，比末位泉州（0.275）高出 50%。结合前三问的一致结论，沈阳在拓扑冗余与空间分布上均展现出最强的抗毁能力。

5 第五问：双约束条件下的最小修路成本分析

5.1 问题建模

第三问与第四问分别给出逐点蓄意攻击与 SP-CI 空间区块攻击下的截断健壮性 $R_{0.01}$ 。本问在其余七座城市的路网 $G = (V, E)$ 上**新增无向边** E_{new} ，以**最小总修路成本**

$$\min_{E_{\text{new}}} \sum_{(u,v) \in E_{\text{new}}} \|\text{pos}(u) - \text{pos}(v)\|_2 \quad (32)$$

使加固后网络 $G' = (V, E \cup E_{\text{new}})$ 同时达到沈阳标杆在相同攻击模型下的水平。记 $R_{\text{CI}}(G')$ 为第三问 CI_ℓ ($\ell = 2$) 最优攻击下的 $R_{0.01}$ ；记 $R_{\text{spatial}}(G', r)$ 为第四问 SP-CI 在波及半径 r 下的 $R_{0.01}$ 。沈阳数值取： $R_{\text{CI}}^{\text{sy}} = 0.1236$ ， $R_{\text{spatial}}^{\text{sy}}(1000 \text{ m}) = 0.4132$ 。**主优化约束**取与第四问主表相同的绝对半径：

$$R_{\text{CI}}(G') \geq R_{\text{CI}}^{\text{sy}}, \quad R_{\text{spatial}}(G', 1000 \text{ m}) \geq R_{\text{spatial}}^{\text{sy}}(1000 \text{ m}). \quad (33)$$

第四问已引入特征尺度 D_i 、相对波及半径 $r_{\text{rel}} = r/D$ 及公平检验半径 $r_{\text{fair}}^{(i)}$ （见式 (30) 及表 7）。它们用于**解释**跨城市成本差异与尺度偏差，**不替代**上文 $r = 1000$ m 的达标口径。 r_{fair} 下的敏感性检验见附录 E.3。

候选边空间规模为 $O(N^2)$ ，精确求解可归约为网络阻断/加固类双层博弈，是 NP-Hard 问题 [10]，故采用分层启发式算法。

5.2 CFB 算法：单点蓄意攻击下的增边

5.2.1 核心理想

CI-Fragmentation-Bridge (CFB) 直接针对第三问 CI_ℓ ($\ell = 2$) 蓄意攻击的机制：攻击逐步移除高集体影响力节点，使网络在拓扑瓶颈处断裂为多个连通分量。在攻击造成的断裂处添加短距离桥边，以最小修路成本恢复跨分量的连通性，从而抬高 $P(q)$ 曲线与截断健壮性 R_{CI} 。

5.2.2 断裂里程碑与候选边生成

每一轮迭代包含以下步骤：

(1) **攻击诊断**。在当前图上运行与第三问相同的 $CI(\ell=2)$ 贪心攻击，得到最优删除序列 σ^* 、巨分量比例曲线 $P(q)$ 及当前 R_{CI} 。

(2) **断裂里程碑**。在 $P(q)$ 上选取 P 首次跌破阈值集合 $\{0.80, 0.65, 0.50, 0.35, 0.20, 0.10\}$ 的六个攻击步 $k_1, \dots, k_6$ 作为**断裂里程碑**，刻画攻击加深过程中结构相继解体的关键阶段。

(3) **跨分量候选边**。对每个里程碑 k_m ：从图中去掉 σ^* 的前 k_m 个节点得残余图 G_{res} ，求连通分量 $\{C_i\}$ 。对每对分量 (C_i, C_j) ，用**全局 KD-Tree**（节点平面坐标）查询欧氏意义下最近的端点对 (u, v) ， $u \in C_i, v \in C_j$ ，作为跨分量桥接候选。

(4) **旁路边候选**。对当前图中 CI 值最高的前 20 个节点 v ，枚举其邻居对 (a, b) ，使得在去掉 v 后的残图中 a, b 分属不同连通分量；此类边模拟关键节点被移除后邻居侧向互连，与 CFB 的断裂机理一致。

(5) **边长过滤**。丢弃长度超过 5000 m 的候选边，避免跨城区超长连接。

5.2.3 评分函数与两阶段接受策略

对跨分量候选 (u, v) ($u \in C_i, v \in C_j$)，定义

$$\text{Score}(u, v) = \frac{|C_i| \cdot |C_j|}{d(u, v)}. \quad (34)$$

分子 $|C_i| \cdot |C_j|$ 衡量合并两分量的**连通性增益**；分母为修路成本。整体是 ΔR 的代理量与 ΔCost 之比，即**边际性价比**。（旁路边分子设为 1）

Greedy 阶段 ($R_{CI} < 0.92 R_{\text{target}}$)：按评分排序，**直接接受**当前评分最高的 5 条边，快速抬高 R_{CI} 。

Precise 阶段 ($R_{CI} \geq 0.92 R_{\text{target}}$)：采用 **Trial-Accept**——并行试探多个候选批次（实现中默认 5 批、每批 2 条边），对每批临时加边后重跑完整 CI 攻击评估 R_{CI} ，**仅永久保留**使 R_{CI} 提升最大的那一批。

5.2.4 数据分析与结论

算法在实例上呈现由近及远的演化：早期多为 10–60 m 量级的局部瓶颈修补，中期过渡到跨社区桥接（边长上升至数百米），后期逼近沈阳标杆时边际收益递减。表 8 汇总七城 CFB 增边；图 7 给出成本与 R_{CI} 轨迹。

表 8 CFB 增边满足第三间约束：七城全量结果

城市	N	R_{CI}^0	R_{CI}^{end}	增边数	成本 (km)	均长 (m)
成都	17567	0.1185	0.1239	30	0.58	19
郑州	8986	0.1147	0.1237	40	1.70	43
泉州	5164	0.1055	0.1245	102	11.06	108
哈尔滨	10132	0.1010	0.1237	298	18.66	63
东莞	7658	0.1054	0.1238	217	34.91	161
青岛	13235	0.0995	0.1236	184	53.71	292
大连	12370	0.0854	0.1236	892	323.24	362

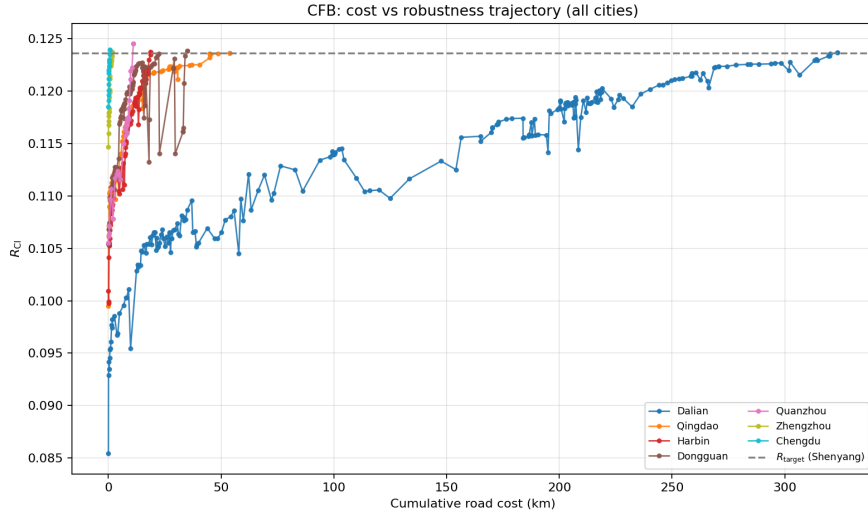


图 7 CFB 迭代过程中累计成本与 R_{CI} 的关系（七城对比）

5.2.5 CFB 后仍不满足空间波及约束

CFB 边端点通常落在高 CI 节点 c 的近邻集合内，边长 δ_3 多在 50–300 m 量级。对 SP-CI 中心 c 与半径 $r = 1000$ m，若 $d(u, c), d(v, c) \ll r$ ，则 (u, v) 易落入 $\text{Patch}(c, r)$ 而共毁，对 R_{spatial} 几乎无贡献。表 9 给出七城在仅完成 CFB 后、 $r = 1000$ m 下的 R_{spatial} ，全部低于沈阳标杆，说明空间阶段不可省略。

5.3 Spatial-CFB 算法：空间波及蓄意攻击下的增边

5.3.1 核心思想与双候选源

Spatial-CFB 将 CFB 中的“攻击诊断”从第三间单点 CI 移除换为第四间 SP-CI 空间补丁攻击（给定波及半径 r ，本文主实验取 $r = 1000$ m）：每步选取 CI 最大存活节点为

表 9 CFB 增边后七城空间健壮性 ($r = 1000$ m; 均未达沈阳 0.4132)

城市	$R_{\text{spatial}}(1000)$ (CFB 后)	沈阳目标	差值 (- 目标)
郑州	0.4039	0.4132	-0.0093
哈尔滨	0.3904	0.4132	-0.0228
成都	0.3851	0.4132	-0.0281
青岛	0.3667	0.4132	-0.0465
大连	0.3511	0.4132	-0.0621
东莞	0.3093	0.4132	-0.1039
泉州	0.2782	0.4132	-0.1350

爆炸中心，并移除该点周围距离 $\leq r$ 的全部存活节点。在此基础上仍采用“断裂处跨分量桥接”的骨架，但引入两类**互补**候选边源：

Source A (里程碑桥接)。与 CFB 类似，在 SP-CI 攻击下的 $P(q)$ 曲线上选取 P 首次跌破 $\{0.85, 0.70, 0.55, 0.40, 0.25, 0.15\}$ 的里程碑，在各里程碑对应的残图上做分量分解与 KD-Tree 最近跨边对，得到与**攻击时间轴**一致的桥接候选。

Source B (单爆炸区旁路)。对 SP-CI 攻击序列中前 15 个**爆炸中心** c_k ，分别构造仅**移除该步爆炸区** $\text{Ball}(c_k, r) \cap V_{\text{alive}}$ 后的残余图（不沿完整攻击序列继续删点），再求连通分量与 KD-Tree 跨边。该源**弱化对全局攻击顺序的依赖**，从而防止添加边后改变 SP-CI 的攻击顺序从而使添加边失效。

5.3.2 评分函数：性价比、长度奖励与安全因子

对 Source A 的跨分量边 (u, v) ， $u \in C_i, v \in C_j$ ，总评分为

$$\text{Score}_A(u, v) = \underbrace{\frac{|C_i| \cdot |C_j|}{d(u, v)}}_{\text{性价比}} \times \underbrace{L(d(u, v))}_{\text{长度奖励}} \times \underbrace{S(u, v)}_{\text{生存因子}}. \quad (35)$$

对 Source B 中心 c 的候选边，评分取

$$\text{Score}_B(u, v; c) = \frac{|C_i| \cdot |C_j|}{d(u, v)} \cdot \text{clip}\left(\frac{\min(d(u, c), d(v, c))}{2r}\right), \quad (36)$$

其中 $\text{clip}(x) = \min(\max(x, 0.3), 2.0)$ 为距离修正因子，将离故障重心较远的边的评分提高以防被故障影响。

5.3.3 迭代流程

每一轮 Spatial-CFB 迭代：

- (1) 运行 SP-CI($r, \ell=2$)，得到删除序列、 $P(q)$ 、 R_{spatial} 及爆炸中心列表。
- (2) 按 Source A、Source B 生成候选边，**去重**后按总评分降序排列。
- (3) **Trial-Accept 贪心选择**
- (4) 预计算全局 KD-Tree 作空间索引，跨分量最近对在多里程碑、多爆炸中心下复

用同一数据结构，保证可扩展性。

5.3.4 在 Q3 增边图上的 Phase B

工程决策：Spatial-CFB 在 **Phase A (CFB)** 已完成的图上继续加边，而非从零开始。

具体流程：Phase A 运行 CFB 直至式 (2) 中 R_{CI} 达标；Phase B 在同一图上运行 Spatial-CFB 直至 $R_{spatial}(\cdot, 1000\text{ m})$ 达标。实验上 Phase B 后 R_{CI} 仍不低于沈阳标杆。

5.4 数据分析与结论

5.4.1 Phase B: Spatial-CFB 数值结果 ($r = 1000\text{ m}$)

表 10 给出空间阶段结果。七城在 $r = 1000\text{ m}$ 下均达到沈阳 $R_{spatial}$ 。其中 5/7 个城市的总成本/原网络道路总长低于 0.1，仅有泉州因交通网络特殊性达到 0.83，故认为 s-cfb 算法性能优异。两阶段成本结果显示 Phase B 在总成本中的主导地位，具体加边见附表。

表 10 Spatial-CFB 增边 ($r = 1000\text{ m}$): 七城全量结果

城市	R_{sp}^0	R_{sp}^{end}	空间增边数	空间成本 (km)	Q3 成本 (km)	总成本 (km)	总成本/原网络道路总长
郑州	0.4040	0.4153	9	6.16	1.70	7.86	0.13%
成都	0.3851	0.4134	80	70.05	0.58	70.63	0.66%
哈尔滨	0.3904	0.4133	77	84.74	18.66	103.41	1.06%
青岛	0.3667	0.4133	242	342.17	53.71	395.88	4.36%
大连	0.3511	0.4145	561	612.78	323.24	936.02	9.24%
东莞	0.3092	0.4143	732	972.64	34.91	1007.55	20.48%
泉州	0.2782	0.4148	2228	4653.55	11.06	4664.61	83.55%

注: R_{sp}^0 为 Phase A 后、Phase B 前的 $R_{spatial}(1000)$ ；沈阳标杆 0.4132。

件。

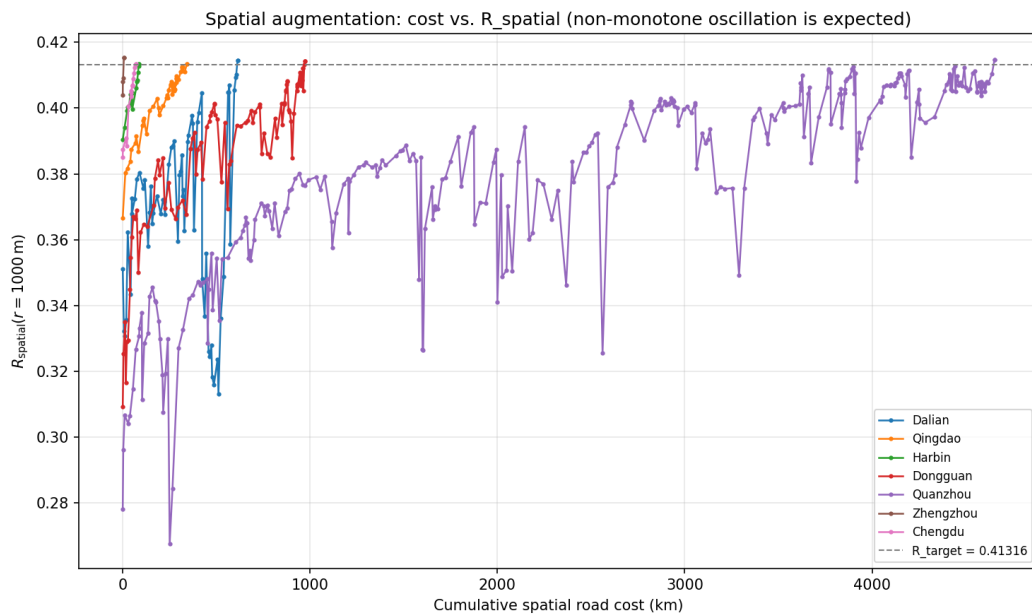


图 8 Spatial-CFB 迭代中空间增边累计成本与 $R_{spatial}(1000\text{ m})$

参考文献

- [1] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23(2): 298–305, 1973.
- [2] K. J. Kansky. *Structure of transportation networks*. Chicago: University of Chicago Press, 1963.
- [3] S. B. Seidman. Network structure and minimum degree. *Social Networks*, 5(3): 269–287, 1983.
- [4] K. P. Burnham, D. R. Anderson. *Model Selection and Multimodel Inference*. New York: Springer, 2002.
- [5] D. Stauffer, A. Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. London: Taylor & Francis, 1994.
- [6] M. E. J. Newman, R. M. Ziff. Fast Monte Carlo algorithm for site or bond percolation. *Physical Review E*, 64(1): 016706, 2001.
- [7] A. Braunstein, L. Dall’Asta, G. Semerjian, L. Zdeborová. Network dismantling. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(44): 12368–12373, 2016.
- [8] F. Morone, H. A. Makse. Influence maximization in complex networks through optimal percolation. *Nature*, 524(7563): 65–68, 2015.
- [9] J. L. Bentley. Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Communications of the ACM*, 18(9): 509–517, 1975.
- [10] R. Zenklusen. Network fortification. *Mathematical Programming*, 145(1–2): 91–123, 2014.
- [11] A. Clauset, C. R. Shalizi, M. E. J. Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, 51(4): 661–703, 2009.

附录 A 问题一补充材料

A.1 候选度分布模型的概率质量函数

表 1 列出了度分布拟合中使用的全部 10 种候选模型及其概率质量函数 (PMF)。经典离散模型 (Poisson、几何、负二项、Zipf、离散正态) 通过 `scipy.stats` 精确 MLE 拟合；幂律族五种模型通过 `powerlaw` 库在 $k_{\min} = 1$ 下拟合。

表 11 10 种候选度分布模型的 PMF 表达式

模型	PMF 表达式	参数数
Poisson	$P(K=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	1
几何 (Geometric)	$P(K=k) = (1-p)^{k-1} p, k \geq 1$	1
负二项 (Neg. Binomial)	$P(K=k) = \binom{k-1+n-1}{k-1} p^n (1-p)^{k-1}, k \geq 1$	2
Zipf	$P(K=k) = k^{-a} / \zeta(a), k \geq 1$	1
离散正态 (Normal _{disc})	$P(K=k) = \Phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}\right)$	2
幂律 (Power Law)	$P(K=k) \propto k^{-\alpha}, k \geq k_{\min}$	1
对数正态 (Log-Normal)	$P(K=k) \propto \frac{1}{k} \exp\left(-\frac{(\ln k - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	2
指数 (Exponential)	$P(K=k) \propto e^{-\lambda k}$	1
拉伸指数 (Stretched Exp.)	$P(K=k) \propto \exp(-\lambda k^\beta)$	2
截断幂律 (Trunc. Power Law)	$P(K=k) \propto k^{-\alpha} e^{-\lambda k}$	2

A.2 完整拓扑指标补充

表 2 补充了正文未列出的拓扑指标，包括连通分量数、方差均值比 (VMR)、全局传递性、近似直径、度同配系数和空间网络指数 $\alpha-\beta-\gamma$ 。

表 12 八城市补充拓扑指标

城市	C	VMR	T	D^*	ℓ^*	r	α	β	γ
成都	157	0.353	0.060	133	50.7	0.274	0.213	1.417	0.472
大连	390	0.375	0.063	186	70.5	0.280	0.172	1.315	0.439
东莞	130	0.372	0.050	135	45.8	0.161	0.177	1.338	0.446
哈尔滨	131	0.351	0.050	162	52.6	0.235	0.192	1.371	0.457
青岛	211	0.412	0.042	183	63.3	0.159	0.192	1.369	0.456
泉州	160	0.402	0.080	125	42.5	0.355	0.186	1.343	0.448
沈阳	59	0.301	0.070	117	41.2	0.353	0.234	1.464	0.488
郑州	25	0.325	0.040	110	41.5	0.246	0.204	1.404	0.468

注: C 为连通分量数; VMR 为度序列方差均值比; T 为全局传递性; D^* 和 ℓ^* 分别为近似直径和近似平均路径长度 (大规模网络采用 2-sweep 和蒙特卡洛估计); r 为 Pearson 度同配系数。

A.3 Clauset 尾部幂律检验

作为全分布 AIC 分析的独立验证，对八城市执行了 Clauset 等人 (2009) [11] 的尾部幂律检验。Vuong 似然比统计量 R 及其 p 值如表 3 所示。所有城市中幂律均被显著拒

绝 ($p < 0.001$), 与全分布 AIC 结论完全一致, 从两个独立视角排除了城市道路网络度分布服从幂律的假设。

表 13 Clauset 尾部检验: 幂律与替代模型的 Vuong 似然比 R

城市	vs 对数正态	vs 指数	vs 拉伸指数	vs 截断幂律
成都	-78.9	-151.1	-85.6	-151.1
大连	-75.0	-142.8	-80.8	-145.4
东莞	-54.4	-100.8	-52.7	-100.8
哈尔滨	-65.3	-122.7	-61.3	-122.8
青岛	-74.8	-141.4	-80.0	-145.7
泉州	-39.7	-72.2	-39.1	-72.2
沈阳	-72.1	-147.4	-89.0	-147.4
郑州	-55.3	-100.3	-53.0	-100.3

注: $R < 0$ 表示替代模型优于幂律, 所有 $p < 0.001$ (显著)。

附录 B 问题二补充材料

B.1 数据与可复现性

- ALL_cities_percolation.json: 八城 MC 平均后的 $\bar{P}(q)$ 、 $\chi(q)$ 等曲线离散数据 (与正文图一致)。
- SUMMARY_TABLE.csv: 正文汇总表对应的数值 (城市、 N 、 R 、 σ_R 、 $q_c^{(\chi)}$ 、 $q_c^{(P)}$ 、 q_c 及耗时)。
- 模拟参数: 每城 500 次独立 MC; q 轴等距重采样至 1001 点; 随机种子固定 (如 42); 图数据在 LCC 诱导子图上生成。

B.2 退化速率 $D(q)$ 的数值计算

对 MC 平均曲线 $\bar{P}(q_i)$, 先采用 Savitzky–Golay 滤波器在滑动窗口内做局部多项式拟合, 再在拟合曲线上求导得到 $\bar{P}'(q)$, 从而 $D(q) = -\bar{P}'(q)$ 。窗口长度与多项式阶数需在抑制噪声与保留拐点之间折中; 正文中的 $q_c^{(P)}$ 即对 $D(q)$ 取最大值位置。若需完全复现, 请与源代码中的滤波参数保持一致。

B.3 Newman–Ziff 反向渗流 (站点渗流) 伪代码

以下给出单条 MC 轨迹的核心逻辑 (并查集实现略去路径压缩与按秩合并细节)。

输入: LCC 上节点列表 V , 边集 E , 随机排列 π (长度 $N = |V|$)。

输出: 该轨迹上的 $P(q)$ 、 $\chi(q)$ 在离散 q 网格上的采样。

-
1. 初始化并查集: 所有节点未激活; $\text{max_size} \leftarrow 0$ 。
 2. **for** $t = N, N-1, \dots, 1$ **do**
 - (a) 激活节点 $v \leftarrow \pi_t$; 对每条边 (v, u) , 若 u 已激活则执行 $\text{Union}(v, u)$ 。
 - (b) 更新当前最大连通分量规模 max_size 。
 - (c) 记激活比例 $p = t/N$, 对应移除比例 $q = 1 - p$; 令 $P(q) \leftarrow \text{max_size}/N$ 。
 - (d) 按正文感受率 $\chi(q)$ 的定义, 用各连通块尺寸增量更新所需统计量。

说明: 实际程序在统一 q 网格上输出多条轨迹的平均 $\bar{P}$ 、 $\bar{\chi}$, 再按正文公式计算 R 、 $q_c^{(P)}$ 、 $q_c^{(\chi)}$ 与 q_c 。

附录 C 问题三补充材料

C.1 数据文件说明

- 数字数据/SUMMARY_TABLE.csv: 八城 LCC 规模、CI/HDA 的截断健壮性 $R_{0.01}$ 、临界删除比例 q^* ，以及第二问随机故障 R_{random} 对照值（与正文表一致）。
- 数字数据/ALL_cities_dismantling.json: 每座城市 CI ($\ell = 2$) 与 HDA 的完整输出（含删除序列与重采样后的 $P(q)$ 曲线离散点），便于复核作图。
- 图/*.png: 与正文图对应的位图副本（蓄意攻击与随机故障 $P(q)$ 对比、 R 柱状对比、 q^* 分组柱状图）。

C.2 源代码与复现实验

- 源代码/run_all_cities.py: 八城批量实验入口；依赖题目给定的边表 CSV、第一问构图模块与 dismantling.py。
- 源代码/dismantling.py: HDA/CI 贪心删除与反向并查集恢复 $P(q)$ 的实现；模块顶部中文注释概述复杂度与算法要点。
- 源代码/plot_qstar_ci_hda.py: 由汇总表生成正文用到的 CI/HDA 双柱 q^* 对比图（输出至 Paper/figures/q3/）。

C.3 反向并查集恢复 $P(q)$ 的伪代码（要点）

输入：原图邻接表（LCC 上重编号）、删除序列 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ （长度 N ）。

输出：各删除步上的 LCC 相对规模 $P_\sigma(k/N)$ 及截断积分 $R_{0.01}$ 。

-
1. 记 $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ ；初始化并查集，先激活所有 $v \notin S$ 的节点并在诱导子图上做 Union，记录最大分量规模序列（对应逆向过程的起点）。
 2. 按 $\sigma_N, \sigma_{N-1}, \dots, \sigma_1$ 依次加回节点：每加入一个节点，将其与已激活邻居合并，更新最大分量规模；将该规模写入正向过程的 P 序列。
 3. 在 $P(k/N) \leq 0.01$ 处截断得 q^* ；对 $\{P(k/N)\}$ 与横轴 $\{k/N\}$ 用梯形公式积分得 $R_{0.01}$ 。

说明：CI/HDA 仅影响删除序列 σ 的生成；恢复阶段与第二问 Newman–Ziff 框架同源，只是把随机激活顺序替换为逆删除顺序。

附录 D 问题四补充材料

D.1 正文中的形状因子 c 、特征尺度 D 与数据溯源

(1) **面积比例 η 与形状因子 c** 。正文在讨论跨城市绝对波及半径的偏差时，将每次空间攻击大致等价于在平面上覆盖一块面积约为 πr^2 的圆盘，并用一个**特征空间尺度 D** 表征城市节点在平面上的展布范围，从而写出

$$\eta(r, D) = \frac{\pi r^2}{c D^2}, \quad (37)$$

其中 c 为**形状因子**（无量纲常数），把“用单一尺度 D 概括城市占地”时几何形状带来的差异吸收到常数里：例如理想化圆形包络时可取 $c \approx \pi/4$ ，轴对齐矩形包络时可取 $c \approx 1/2$ 等。本文**不对 c 做数值拟合**，仅用于说明在固定绝对半径 r 下， $\eta \propto 1/D^2$ 的尺度效应；相对波及半径 $r_{\text{rel}} = r/D$ 的论证与 c 的具体取值无关（固定 r_{rel} 时 $\eta = \pi r_{\text{rel}}^2/c$ 与 D 无关）。

(2) **正文表中的 D (km) 的来源**。正文采用**有效特征尺度**

$$D_i = \sqrt{\frac{N_i}{\rho_i}}, \quad \rho_i \approx \frac{\bar{p}_{500}^{(i)}}{\pi \cdot 500^2}, \quad (38)$$

其中 N_i 为城市 i 的 LCC 节点数； $\bar{p}_{500}^{(i)}$ 为在第四问 SP-CI 空间攻击中、取波及半径 $r = 500$ m 时，**平均每步攻击移除的节点数**，由程序输出的累计移除节点数与攻击步数之比得到：

$$\bar{p}_{500}^{(i)} = \frac{n_{\text{removed}}^{(i)}(r=500)}{n_{\text{attacks}}^{(i)}(r=500)}. \quad (39)$$

表 14 特征尺度 D 与相对半径相关量的计算溯源（ $r = 500$ m 行来自 Q4 输出）

城市	N_{LCC}	$\bar{p}_{500}$	$\rho (\times 10^{-5})$	D (km)	r_{rel}^{1000} (%)	r_{fair} (m)
沈阳	12751	13.29	1.693	27.45	3.64	1000
郑州	8986	11.52	1.467	24.75	4.04	902
哈尔滨	10132	15.48	1.971	22.67	4.41	826
成都	17567	14.43	1.838	30.92	3.23	1127
青岛	13235	12.23	1.557	29.16	3.43	1062
大连	12370	11.70	1.490	28.82	3.47	1050
东莞	7658	11.88	1.513	22.50	4.44	820
泉州	5164	8.43	1.073	21.94	4.56	799

D.2 八城市 LCC 节点空间分布示意

图 9 为各城市 LCC 节点在 UTM 平面上的散点分布（高亮 LCC）。可直观体现不同城市空间延展形态与“绝对半径对标”的物理含义。

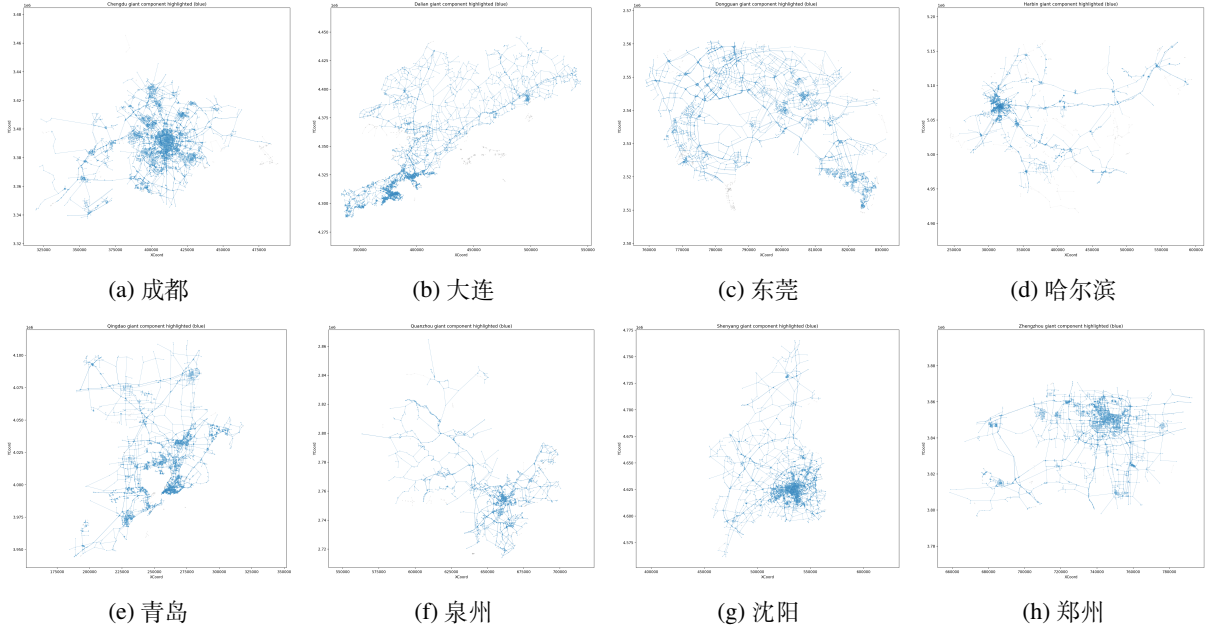


图 9 八城市最大连通分量 (LCC) 节点 UTM 平面分布示意

D.3 数据文件说明

- 数字数据/SPATIAL_SCALE_SOURCES.csv: 表 1 的逐列来源与公式说明 (含 ρ 、 D 、 r_{fair})。
- 数字数据/ALL_MICROSCALE_R_spectrum_summary.csv: 八城在全部测试半径下的 $R_{0.01}$ (微观标度谱)。
- 数字数据/SUMMARY_TABLE.csv: 八城在 $r \in \{500, 1000, 2000, 3000, 5000\}$ 下的完整指标汇总。
- 数字数据/ALL_cities_spatial.json: 汇总 JSON。
- 各城 spatial_r{radius}.json: 完整攻击日志与重采样 $P(q)$ 曲线。

D.4 源代码与复现实验

- 源代码目录下的 spatial_dismantling.py: SP-CI 核心实现 (KD-Tree、CI-Center 堆、Patch 移除、HDA 降级、反向并查集)。
- 源代码目录下的 run_all_cities.py: 八城 $\times$ 五半径批量实验入口。
- 源代码目录下的 run_all_cities_microscale.py: 微观标度谱实验入口。

D.5 SP-CI 空间攻击算法要点

输入: LCC 邻接表、节点 UTM 坐标、波及半径 r 、CI 阶数 $\ell = 2$ 、阈值 $\theta = 0.01$ 。

输出: 攻击序列 σ 、截断健壮性 $R_{0.01}$ 、 $P(q)$ 曲线。

-
1. 对全部节点坐标构建 k -d 树，预计算各节点半径 r 内的空间邻域集合。
 2. 计算全部节点的 CI_ℓ 分数，构建最大堆。
 3. **贪心循环** (Phase A):
 - 从堆顶弹出 CI 最大的存活节点 c^* (惰性校验: 若分数过期则重算后重入堆)。
 - 构建空间 Patch $S = \{j \in \text{SpatialNbrs}(c^*, r) : \text{alive}[j] = 1\}$ 。
 - Patch 内节点按 CI 降序排列, 依次追加到全局删除序列 σ 。
 - 标记 S 中节点为死亡, 更新边界节点的度数及其 ℓ -hop 邻域的 CI 。
 - 当所有存活节点 CI 归零时, 切换为最大度贪心 (HDA)。
 4. **反向恢复** (Phase B): 将 σ 时间反转, 从残图逐节点加回, 用按秩合并与路径压缩的并查集维护 LCC, 以梯形法则积分得 $R_{0.01}$ 。

附录 E 问题五补充材料

E.1 七城 CFB（第三问）增边汇总表

表 15 CFB 全量数值汇总 (SUMMARY_TABLE.csv)

城市	N	$ E _0$	$ E _{\text{end}}$	R_{CI}^0	$R_{\text{CI}}^{\text{end}}$	目标	Q3 达标	增边数	成本 (km)	均长 (m)
沈阳	12751	18797	18797	0.123602	0.123602	0.123602	是	0	0.000	—
成都	17567	25295	25325	0.118512	0.123935	0.123602	是	30	0.578	19.3
郑州	8986	12679	12719	0.114682	0.123714	0.123602	是	40	1.702	42.5
泉州	5164	7235	7337	0.105524	0.124500	0.123602	是	102	11.057	108.4
哈尔滨	10132	14185	14483	0.100960	0.123729	0.123602	是	298	18.664	62.6
东莞	7658	10542	10759	0.105391	0.123815	0.123602	是	217	34.906	160.9
青岛	13235	18518	18702	0.099480	0.123618	0.123602	是	184	53.714	291.9
大连	12370	16992	17884	0.085437	0.123644	0.123602	是	892	323.239	362.4

E.2 七城 Spatial-CFB（第四问， $r = 1000$ m）增边汇总表

表 16 Spatial-CFB 全量数值汇总 (SPATIAL_SUMMARY_TABLE.csv)

城市	N	$ E _{\text{Q3}}$	$ E _{\text{end}}$	R_{sp}^0	$R_{\text{sp}}^{\text{end}}$	目标	达标	ΔE_{sp}	空间成本 (km)	总成本 (km)
沈阳	12751	18797	18797	0.413159	0.413159	0.413159	是	0	0.000	0.000
郑州	8986	12719	12728	0.403951	0.415264	0.413159	是	9	6.159	7.860
成都	17567	25325	25405	0.385109	0.413429	0.413159	是	80	70.052	70.630
哈尔滨	10132	14483	14560	0.390409	0.413334	0.413159	是	77	84.741	103.406
青岛	13235	18702	18944	0.366679	0.413338	0.413159	是	242	342.168	395.882
大连	12370	17884	18445	0.351125	0.414547	0.413159	是	561	612.781	936.020
东莞	7658	10759	11491	0.309237	0.414306	0.413159	是	732	972.643	1007.549
泉州	5164	7337	9565	0.278190	0.414778	0.413159	是	2228	4653.553	4664.609

E.3 东莞：公平半径 $r_{\text{fair}} \approx 821$ m 下的对照验证

表 17 东莞三种网络状态下的健壮性 ($D = 22.5$ km, $r_{\text{fair}} = 821$ m)

状态	R_{CI}	$R_{\text{sp}}(821)$	$R_{\text{sp}}(1000)$	Q4@1000 相对 0.4132
原始网络	0.1054	0.3009	0.3117	未达标
Phase A (CFB)	0.1238	0.3033	0.3092	未达标
Phase A+B (全增边)	0.1269	0.3460	0.4143	达标

解读：(1) CFB 短边使 R_{CI} 达标，但对 $R_{\text{sp}}(821)$ 几乎无提升 ($0.301 \rightarrow 0.303$)。(2) Spatial-CFB 在 $r = 1000$ m 设计下使 $R_{\text{sp}}(1000)$ 达标，但 $R_{\text{sp}}(821)$ 仅升至约 0.346，若以 r_{fair} 为硬约束需额外增边（估计量级数百 km 以上）。

E.4 S-CFB 第二阶段关键定义与详细流程

(1) **Source A 的评分函数。**对里程碑分解得到的跨分量候选边 (u, v) , $u \in C_i$, $v \in C_j$:

$$\text{Score}_A(u, v) = \frac{|C_i| \cdot |C_j|}{d(u, v)} \cdot L(d(u, v)) \cdot S(u, v). \quad (40)$$

长度奖励 $L(d)$ (r 为攻击半径):

$$L(d) = \begin{cases} 1.5, & d \geq r, \\ 1.0 + 0.5 \cdot \frac{d-0.5r}{0.5r}, & 0.5r \leq d < r, \\ 0.3, & d < 0.3r, \\ 0.7, & \text{其余}. \end{cases} \quad (41)$$

生存因子 $S(u, v)$ (根据 SP-CI 删除序列中的生存次序):

$$S(u, v) = 0.5 + 0.5 \cdot \min\left(\frac{\text{rank}(u)}{N_{\text{step}}}, \frac{\text{rank}(v)}{N_{\text{step}}}\right). \quad (42)$$

(2) Source B 的评分函数。 对前 15 个爆炸中心 c_k , 构造仅移除该步爆炸区后的残图候选边, 评分写作

$$\text{Score}_B(u, v; c_k) = \frac{|C_i| \cdot |C_j|}{d(u, v)} \cdot \text{clip}\left(\frac{\min(d(u, c_k), d(v, c_k))}{2r}\right), \quad (43)$$

其中 $\text{clip}(x) = \min(\max(x, 0.3), 2.0)$ 。

(3) 第二阶段详细流程。

1. 在当前图上运行 SP-CI($r, \ell = 2$), 得到删除序列、 $P(q)$ 、 R_{spatial} 与爆炸中心列表。
2. Source A: 按阈值 $\{0.85, 0.70, 0.55, 0.40, 0.25, 0.15\}$ 提取里程碑; 在每个里程碑残图上做分量分解和 KD-Tree 最近跨边检索, 按 Score_A 评分。
3. Source B: 对前 15 个爆炸中心逐一做“单爆炸区”残图分析, 按 Score_B 评分。
4. 汇总并去重候选边后按评分排序, 执行全程 Trial-Accept: 每轮试探 3 个候选批次。
5. Greedy 阶段默认 $\text{batch_size}=10$ 。
6. 当 $R_{\text{spatial}} \geq 0.97R_{\text{target}}$ 时切换 Precise, $\text{batch_size}=3$ 。
7. 接受使 R_{spatial} 提升最大的批次; 若均无提升, 接受第 1 批以保持探索, 随后进入下一轮。

E.5 附录源代码与数据归档

附件中已收录问题五源代码副本:

- 附录/问题五/源代码/augmentation.py (CFB 核心)
- 附录/问题五/源代码/spatial_augmentation.py (S-CFB 核心)
- 附录/问题五/源代码/run_all_cities.py (七城 CFB 批量脚本)

- 附录/问题五/源代码/run_all_cities_spatial.py (七城 S-CFB 批量脚本)
- 附录/问题五/源代码/test_dongguan_rfair.py (东莞公平半径检验)

附件中已收录运行过程 JSON:

- 附录/问题五/cfb&s-cfb 加边过程/ (逐城 CFB 与 S-CFB 加边明细)